MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 18.02.2012

Barem
Clasa a 9-a

1. Start 1p
   $|x-6| \in \mathbf{Z} \Rightarrow x-6 \in \mathbf{Z}$ 2p
   Scriind relaţia $[x] \le x < [x]+1$ pentru fiecare parte întreagă a membrului drept
   Se obţine $|x-6| \le 2x-5 < |x-6|+4$ 3p
   Dacă $x \ge 6 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ care nu convin 2p
   Dacă $x < 6 \Rightarrow x \in \{3, 4\}$ dintre care verifică ecuaţia doar $x = 4$ 2p

2. Start 1p
   a) Avem $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ şi 2p
   Din o variantă a inegalităţii Cauchy-Schwarz avem
   $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}=$$ 2p
   $$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{a+b+c}{2} \ge \frac{9}{2}$$ 1p

   b) Vom demonstra inegalitatea prin inducţie
   $P(n): (a_1+a_2+...+a_n)^2 \ge a_1{}^2+3a_2{}^2+....+(2n-1)a_n{}^2$
   $P(1)$ adevărată 1p
   Presupunem $P(k)$ adevărată şi demonstrăm $P(k+1)$ adevărată
   $(a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1})^2 =$
   $(a_1+a_2+...+a_k)^2+2(a_1+a_2+...+a_k)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2$ 1p
   Dar $2(a_1+a_2+...+a_k)a_{k+1} \ge 2ka_{k+1}{}^2$ 1p
   Şi din ipoteza de inducţie
   $(a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1})^2 \ge a_1{}^2+3a_2{}^2+....+(2k-1)a_k{}^2+2ka_{k+1}{}^2+a_{k+1}{}^2=$
   $=a_1{}^2+3a_2{}^2+....+(2k-1)a_k{}^2+(2k+1)a_{k+1}{}^2$ 1p
   Din Principiul Inducţiei Matematice rezultă $P(n)$ adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$

3. Start 1p
   a) Din Teorema lui Menelaos in ΔABN şi transversala $C-I-M$ avem că

$$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{IN}{IB}\cdot\frac{CA}{CN}=1$$

Cum $\frac{NC}{NA}=n\Rightarrow\frac{AC}{NC}=\frac{n+1}{n}$ rezultă $\frac{IN}{IB}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{m}=\frac{n}{m(n+1)}$ 1p

Deci $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{\frac{n}{m(n+1)}+1}\overrightarrow{AN}+\frac{\frac{n}{m(n+1)}}{\frac{n}{m(n+1)}+1}\overrightarrow{AB}$ 1p

$=\frac{m(n+1)}{m+n+mn}\overrightarrow{AN}+\frac{n}{m+n+mn}\overrightarrow{AB}$ şi cum $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{AC}$ 1p

$\overrightarrow{AI}=\frac{m}{m+n+mn}\overrightarrow{AC}+\frac{n}{m+n+mn}\overrightarrow{AB}$ 1p

b) Din ipoteză AI mediană şi dacă $AI\cap BC=\{P\}$ rezultă $PB=PC$

şi din Teorema Ceva avem $\frac{PB}{PC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{MA}{MB}=1\Rightarrow\frac{NC}{NA}=\frac{MB}{MA}$ 1p deci $MN\parallel BC$ şi G centru de greutate rezultă $\frac{AG}{GP}=2$ 1p

de unde $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}$ şi $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ 1p

Cum $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ rezultă $\overrightarrow{GI}=\frac{1}{15}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ 1p

Deci $\overrightarrow{GA}=-5\overrightarrow{GI}$ 1p

4. Start 1p

Din ipoteză $a_i\geq 0,\ \forall i=\overline{1,2012}$.

Presupunem fără a reduce generalitatea că $a_1=\max\limits_{i=1,2012}\{a_i\}$ 1p

Şi notăm $a_1=a,\ a_2=b$ pozitive, deci $a=|a_3-a_4|$ de unde

$a_3=0$ şi $a_4=a$ sau $a_3=a$ şi $a_4=0$ 2p

Cazul I $a_3=0$ şi $a_4=a$. Avem

$b=a_2=|a_4-a_5|=|a-a_5|=a-a_5\Rightarrow a_5=a-b$ 1p

$0=a_3=|a_5-a_6|=|a-b-a_6|\Rightarrow a_6=a-b$

$a=a_4=|a_6-a_7|=|a-b-a_7|\Rightarrow a_7=-b\geq 0\Rightarrow b=0$

Avem deci distribuţia şirului 2p

a 0 0 a a a 0 a 0 0 a a a 0 .... deci o secvenţă de 7 termeni a căror valori se repetă. Cum $2012:7=287$ rest 3

rezultă $a_{2011}=0$, dar $a_{2011}=|a_1-a_2|=a$, 1p

rezultă $a=0$ deci $a_i=0,\ \forall i=1,...,2012$ 1p

Cazul II $a_3=a$ şi $a_4=0$ se tratează analog 1p